14/12/20

Πόρισμα (3 Θ.1 Συλ.) Θ. Taylor: Έστω $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^k(\mathcal{U})$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\bar{x} \in \mathcal{U}$. Τότε:

$$f(\bar{x}+\bar{u}) = \underbrace{\sum_{m=0}^{k} \sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a}_{} + o(\|\bar{u}\|^k),$$

για $\bar{u} \to \bar{0}$

$=: T_{k,f,\bar{x}}(\bar{u})$

= πολ/μο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$

Θέλουμε να δούμε ακριβώς ποια είναι τα πολ/μα Taylor βαθμών $m=0,1,2$, δηλ. πρέπει να δούμε ποια είναι τα $\sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a$ για $m=0,1,2$

(a) $\boxed{m=0}$: Ποια είναι τα $a=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ με $|a| = a_1+\dots+a_n = 0$

Αφού $a_i \geq 0$ $\forall\, i=1,\dots,n$ αναγκαία για $|a|=0$ θα πρέπει $a_i = 0$ $\forall\, i=1,\dots,n$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=0} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a = \frac{D^{\bar{0}} f(\bar{x})}{\bar{0}!} \bar{u}^{\bar{0}}$$

$\bar{u}^a = u_1^{a_1} \cdots u_n^{a_n}$, $\bar{u} = (u_1,\dots,u_n)$

$\bar{u}^{\bar{0}} = u_1^0 \cdots u_n^0 = 1 \cdots 1 = 1$

με $\bar{0}! = (0!) \cdots (0!) = 1 \cdots 1 = 1$

και $D^{(0,\dots,0)} f(\bar{x}) = f(\bar{x})$

$= \frac{\partial^0}{\partial x_1^0 \cdots \partial x_n^0} f(\bar{x}) = f$

Συνεπώς για $m=0$ το Θ. Taylor μας λέει:
$f \in C(\mathcal{U})$, $\bar{x} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + o(1)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{u})-f(\bar{x})}{1} = 0 \quad \left[\Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x})\right]$$

(β) $\boxed{m=1}$: $\left[\sum_{|a|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a = \;?\right]$

$a=(a_1,\dots,a_n)\in \mathbb{N}_0^n$ με $|a| = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{N}_0}+\dots+\underbrace{a_n}_{\in\mathbb{N}_0}=1$

$$\Rightarrow a = \bar{e}_i = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-θέση}}}{1},0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{u}^a = \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i} f(\bar{x})}{\bar{e}_i!} \underbrace{\bar{u}^{\bar{e}_i}}_{} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} u_i \quad (*)$$

$$= \underbrace{u_1^0 \dots u_{i-1}^0}_{=u_i} u_i^1 \underbrace{u_{i+1}^0 \dots u_n^0}_{=1}$$

με $\bar{e}_i! = (0!)\dots(0!)\underbrace{(1!)}_{}(0!)\dots(0!) = 1$

και $D^{\bar{e}_i} f(\bar{x}) = \dfrac{\partial f^1(\bar{x})}{\partial x_1^0 \dots \partial x_{i-1}^0\, \partial x_i\, \partial x_{i+1}^0 \dots \partial x_n^0} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$

(*) $= \text{grad} f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = Df(\bar{x})\cdot\bar{u}$

Συνεπώς για $n=1$, το Θ. Taylor λέει: $f\in C^1(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x}\in U$. Τότε $f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})\bar{u} + o(\|\bar{u}\|)$ (*1) για $\bar{u}\to\bar{0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{u})-f(\bar{x})-Df(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = 0$$

Σημείωση: Το (*1) λέει $f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})\bar{u} + g(\bar{u})$ με $g(\bar{u}) = o(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u}\to\bar{0}$: $\Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \dfrac{g(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = 0$

(γ) $\boxed{m=2}$: $\sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a = ?$

Ποια $a=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ έχουν $|a| = a_1+\dots+a_n = 2$?

$\underset{|a|=2}{\Rightarrow}$ $a = \bar{e}_i + \bar{e}_j$ για $i,j = 1,\dots,n$ με $i \le j$

Αυτή η συνθήκη μπαίνει ούτως ώστε να μη βάλουμε 2 φορές το ίδιο $a = \bar{e}_i + \bar{e}_j$

όπου $\bar{e}_i = (0,\dots,\underset{i\text{-θέση}}{1},\dots 0)$

$\bar{e}_j = (0,\dots,\underset{j\text{-θέση}}{1},\dots 0)$

$\bar{e}_i + \bar{e}_j = (0,\dots,\underset{i\text{-θέση}}{1}, 0,\dots,0,\underset{j\text{-θέση}}{1},\dots 0)$

ή πιο αναλυτικά:

$\bar{a} = 2\bar{e}_i$ για $i = 1,\dots,n$
$= (0,\dots,0,\underset{i\text{ θέση}}{2},0,\dots,0)$

ή

$\bar{a} = \bar{e}_i + \bar{e}_j$ με $i,j = 1,\dots,n$ και $i<j$

π.χ.

το $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = (1,1,0,\dots,0)$

$[= \bar{e}_2 + \bar{e}_1 = (1,1,\dots,0)]$

δεν το μετράει γιατί είναι το ίδιο με το προηγ.

Ιδέα: Όταν γράφουμε $\sum_{|a|=m} F(a)$, εννοούμε ότι αθροίζουμε όλα τα $F(a)$ για όλα τα διαφορετικά a που έχουν $|a|=m$]

Άρα: $|a| = 2 \Rightarrow \bar{a} = \bar{e}_i + \bar{e}_j,\ i \leq j \iff a = 2\bar{e}_i,$
$i = 1, \dots, n$

ή $a = \bar{e}_i + \bar{e}_j$ με $i < j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a = \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{2\bar{e}_i} f(\bar{x}) \cdot \bar{u}^{2\bar{e}_i}}{(2\bar{e}_i)!} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i+\bar{e}_j)!} \cdot \bar{u}^{\bar{e}_i+\bar{e}_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} u_i^2$$

όπου:

$(2\bar{e}_i)! = 2! = 2! = 2$

$$D^{2\bar{e}_i} f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2}$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i+\bar{e}_j)!} \underbrace{\bar{u}^{\bar{e}_i+\bar{e}_j}}_{= \underbrace{u_1^0}_{=1} \dots \underbrace{u_i^1}_{u_i} \dots \underbrace{u_j^1}_{=u_j} \dots u_n^0 = u_i u_j}$$

με $(\bar{e}_i + \bar{e}_j)! = (0!) \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{από το } \bar{e}_i}}{(1!)} \dots (0!) \dots (1!) \dots (0!) = 1$

$$D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Rightarrow \sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} u_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} \left[= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j \right]$$

[ή $j < i$]

αλλάζω το σύμβολο $i \leftrightarrow j$

αν $f \in C^2(U)$ [Schwarz]

$$\underset{f \in C^2(U)}{\Rightarrow} \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j}_{=A} = \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j}_{=B}$$

$= \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ για $f \in C^2$ [Schwarz]

$\left[A = B \Rightarrow A + B = 2A = 2B \iff A = \frac{A+B}{2} = B \right]$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{=A} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{=A+B}$$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2} h_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i x_j}}_{\overset{i=j}{=} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i^2}} h_i h_j =$$

$$= \frac{1}{2} (h_1, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$=: Hf(\bar{x})$: Εσσιανός της f

Συνεπώς, για $n=2$, το Θ. Taylor λέει:
$f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U \Rightarrow$
$$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})\bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T D^2 f(\bar{x}) \bar{h} + o(\|\bar{h}\|^2)$$

για $\bar{h} \to 0$

όπου $D^2 f(\bar{x}) := Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}(\bar{x})$

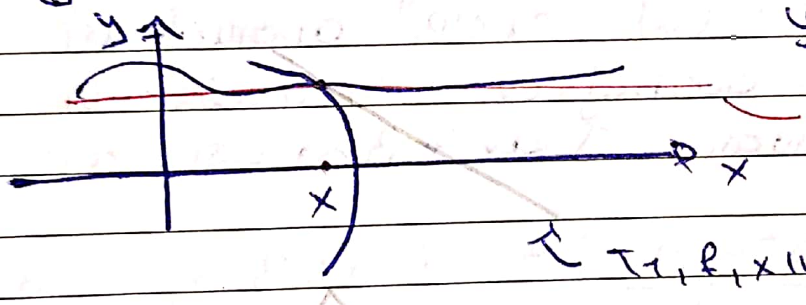
$\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο Εσσιανός της f στο $\bar{x}$ ο οποίος για $f \in C^2(U)$ είναι συμμετρικός (Schwarz)

[Για $f \in C^2(U)$ ο Εσσιανός είναι η $2^{η}$ παράγωγος της f]

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{u}^T D^2 f(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|^2} = 0$$

[Γεωμετρικά: Το πολυώνυμο Taylor είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στο σημείο $\bar{x} \in U$ από ένα πολυώνυμο βαθμού 2 (όπως ακριβώς το πολ. Taylor βαθμού 1 είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στο $\bar{x}$ από μια ομοπαραλληλική (= αφφινική) [= σταθερά + γραμμική] συνάρτηση [πολ. βαθμ. 1] και το πολυώνυμο Taylor βαθμού 0 είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στο $\bar{x}$ από μία σταθερά]

Για $n=1$



$y = f(x)$ [εδώ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$]

$T_{0,f,x}(u) = f(x)$: σταθ. ευθεία

$T_{1,f,x}(u) = f(x) + f'(x)u$: εφαπτ. ευθ.

$T_{2,f,x}(u) = f(x) + f'(x)u + \frac{1}{2} f''(x)u^2$: παραβολή

Ιδέα Taylor: Προσεγγίζουμε την f τοπικά με πολυώνυμα όλο και μεγαλύτερου βαθμού

Παρατήρηση: Το Θ. Taylor μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό ορίων:

Π.χ.
Έστω $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 \in U$

Τότε:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - Df(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0) - \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{x}_0)^T D^2 f(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|^2}$$

ανάστροφος = διάνυσμα ως στήλη → πίνακας γραμμή

Π.χ. για $n=2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) - \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0) D^2 f(x_0,y_0) (x-x_0, y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0$$

Παρατήρηση: Αν $f \in C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x} \in U$. Τότε η f ονομάζεται ($\mathbb{R}$) αναλυτική [ή πραγματικά αναλυτική] αν $\exists\, R>0$ έτσι ώστε:

$$f(\bar{x}+\bar{u}) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{u}^a}_{= P_m(\bar{u}) \in \mathbb{R}}}_{\text{σειρά (ή ανάπτυγμα) Taylor της } f \text{ στο } \bar{x}} \quad \forall\, \bar{u} \in B(\bar{0}, R)$$

$R>0$

Το μέγιστο $R>0$ για το οποίο ισχύει αυτό ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της f στο $\bar{x}$. Αν αυτό ισχύει $\forall\, \bar{x} \in U$: $f \in C^\omega(U)$